

Separability criteria for loops via the Goldman bracket

和久田 葵 (東京大学大学院数理科学研究科)

Email: aoichan19991226@g.ecc.u-tokyo.ac.jp

概要

本講演では、連結な向き付け可能曲面上の 2 つの（単純であるとは限らない）閉曲線の自由ホモトピー類が、互いに交わらない代表元を持つための代数的な判定条件を、Goldman 括弧積を用いて与える。また応用として、a pair of pants の場合の Goldman Lie 代数の中心を決定する。これは、単純閉測地線のみで fill up される向き付け可能曲面に限られていた Kabiraj [4] の手法を、非単純な測地線にまで拡張するものであり、中心が 1 点にホモトピックなループの類と、1 点穴または境界成分を周回するループの類によって生成されることを示す。

また、TWG 括弧積についても、Goldman 括弧積と同様の結果が成り立つことを示した。その系として、TWG 括弧積を用いた、向きをもたない閉曲線の分離に関する Chas–Kabiraj の予想が、一方が primitive でない場合に成り立つことも示した。

1 Goldman 括弧積

Definition 1.1. 向き付けられた連結な曲面 S 上の有向閉曲線の自由ホモトピー類全体の集合を $\hat{\pi}$ とし、 $K\hat{\pi}$ を $\hat{\pi}$ で生成される可換環 K 上の自由加群とする。 $x, y \in \hat{\pi}$ に対して、 $[x, y]$ を以下のように定義する

$$[x, y] := \sum_{P \in x \cap y} \varepsilon_P(x, y) |x_P y_P|.$$

ただし、 x と y の代表元を一般の位置にとる。これにより、 $x \cap y$ は有限個の横断的な交点の集合となる。

また、 $\varepsilon_P(x, y) \in \{\pm 1\}$ は P における x と y の局所交点数であり、 $|x_P y_P|$ は、積 $x_P y_P \in \pi_1(S, P)$ の基点 P を忘れることで得られる自由ホモトピー類である。

これを双線形に $K\hat{\pi}$ 上へ拡張した演算 $[\cdot, \cdot]$ を Goldman 括弧積という。

Goldman [4] は $K\hat{\pi}$ が Goldman 括弧積により、リー代数の構造を持つことを示した。これを Goldman リー代数という。また、括弧積の定義から、2 つの閉曲線の自由ホモトピー類が互いに交わらない代表元をもつとき、それらの Goldman 括弧積は 0 となる。逆に、Goldman 括弧積が 0 となるときに、交わらない代表元が存在するかどうかについては、次の定理が知られている。

Theorem 1.2 (Goldman [4]). 2 つの閉曲線の自由ホモトピー類 $x, y \in \hat{\pi}$ について x は単純な代表元をもつとする。このとき、以下の (1), (2) は同値である：

- (1) $[x, y] = 0$ をみたす。
- (2) x, y は互いに交わらない代表元をもつ。

ただしこの定理は、 x, y の両方が単純とは限らない場合には同値でなくなることが知られている (Example 1.3)。

Example 1.3 (Chas–Kabiraj [2]). 図 1 のように a pair of pants 上に 2 つの閉曲線の自由ホモトピー類 $x, y \in \hat{\pi}$ を取ると、 $[x, y] = 0$ を満たすが、これらの代表元は常に互いに交わる。

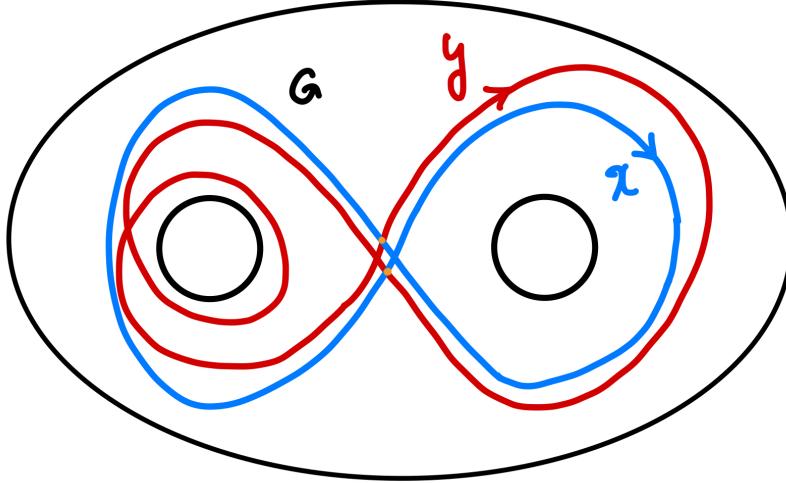


図 1: Goldman 括弧積は 0 となる一方で、代表元は常に交わってしまう例

このような背景から、 x, y がともに単純とは限らない場合でも、以下の条件が同値になるのではないかと予想されている。

Conjecture 1.4 (Chas-Kabiraj [2]). 2つの閉曲線の自由ホモトピー類 $x, y \in \hat{\pi}$ について、 $y \neq x, x^{-1}$ のとき、以下の(1), (2)は同値である：

- (1) $[x + x^{-1}, y + y^{-1}] = 0$ をみたす。
- (2) x, y は互いに交わらない代表元をもつ。

この予想は、 $x, y \in \hat{\pi}$ のいずれか一方が単純であれば成り立つことが示されている [2]。また、 $x, y \in \hat{\pi}$ がいずれも単純でない場合についても、これらを基本群の共役類の元で表した際に、語の長さがそれぞれ 7 以下であれば成り立つことも、コンピュータを用いた計算により示されている [2]。

Remark 1.5. この予想 1.4 について、 $x + x^{-1}$ と x の向きを捨てた閉曲線の自由ホモトピー類 \tilde{x} は 1 対 1 に対応する。これにより、向きを捨てた閉曲線の自由ホモトピー類の集合で K 上生成された自由加群にリー代数の構造が誘導され、これは TWG (Thurston-Wolpert-Goldman) リー代数と呼ばれる。

このように、先行研究では x, y がともに単純とは限らない場合にも Goldman 括弧積を用いて、それらが交わらない代表元を持つことの特徴付けを与えようという試みがあるが、本講演ではこの Conjecture 1.4 とは異なる形でその特徴付け (Cororally 2.2) を与える。また、Conjecture 1.4 に対する部分的な肯定的解決も得られた。

2 主結果

上記のように、曲線の両方の向きを同時に扱う対称的な条件とは異なり、本講演では、一方のループ x を m 周させて得られる x^m に注目し、 $[x^m, y]$ の消滅から交わらない代表元の存在を特徴付ける。

Theorem 2.1 (W.). 2つの閉曲線の自由ホモトピー類 $x, y \in \hat{\pi}$ に対して、 $[x^m, y] = 0$ を満たす $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ が存在するとき、 $y = x^m$ または x, y は互いに交わらない代表元をもつ。

この Theorem 2.1 から、次の系がしたがう。

Corollary 2.2 (W.). 2つの閉曲線の自由ホモトピー類 $x, y \in \hat{\pi}$ に対して、次の3条件は同値である：

- (1) $[x^m, y] = 0$ をみたす異なる正の整数 m が2つ存在する。
- (2) $[x^m, y] = [x, y^n] = 0$ をみたす異なる正の整数 m と n が存在する。
- (3) x, y は互いに交わらない代表元をもつ。

また、片方のループが primitive でない（すなわち他のループの幂で表される）場合には、本講演で用いる証明手法を応用することで、Conjecture 1.4 の主張が成り立つことも示すことができる。

Theorem 2.3 (W.). 2つの閉曲線の自由ホモトピー類 $x, y \in \hat{\pi}$ について、 x が primitive でないとする。このとき以下の(1),(2)は同値である：

- (1) $[x + x^{-1}, y + y^{-1}] = 0$ をみたす。
- (2) x, y は互いに交わらない代表元をもつか、 $y = x, x^{-1}$ 。

加えて、Goldman Lie 代数の中心に関する応用もある。これまでに、閉曲面の場合には Etingof [3] により、境界成分が1つで種数が無限の曲面の場合には Kawazumi–Kuno [5] により、オイラー標数が負である向き付け可能曲面（ただし a pair of pants を除く）については Kabiraj [4] により、それぞれ中心が決定されている。

特に、Kabiraj [4] の手法は双曲幾何を用いており、単純閉測地線のみで fill up される向き付け可能曲面に限って適用可能であったため、a pair of pants に対する中心の決定には至らなかった。本研究ではこの手法を、単純とは限らない閉測地線のみで fill up される向き付け可能曲面にまで拡張することで、a pair of pants に対する Goldman Lie 代数の中心の決定にも成功した。

Theorem 2.4 (W.). A pair of pants の Goldman Lie 代数の中心は、1点にホモトピックなループの類、および1点穴または境界成分を周回するループの類によって生成される。

3 主結果の証明について

証明には双曲幾何を用いるため、記号をいくつか準備する。オイラー標数が負である連結な向き付けられた曲面 S 上のある双曲計量 X と、 $x \in \hat{\pi}$ に対して、 $x(X)$ は双曲計量 X のもとでの、 x の閉測地代表元とし、その長さを $\ell_x(X)$ で表す。さらに、 $y \in \hat{\pi}$ とし、 $x(X) \cap y(X)$ 上の点 P における forward angle を ϕ_P で表す。このとき次の補題が成り立つ。

Lemma 3.1. X を S 上のある双曲計量とする。 $x, y, z \in \hat{\pi}$: essential とし、 $\ell_y(X) = \ell_z(X)$ をみたすとする。また、 $P \in x(X) \cap y(X), Q \in x(X) \cap z(X)$ とし、 $|x_P^m y_P| = |x_Q^m z_Q|$ をみたす $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ が存在するとき、 $x(X) \cap y(X)$ 上の点 R で $\phi_R < \phi_P$ を満たすものが存在するか、あるいは $y = z$ が成り立つ。

特に、 $\varepsilon_P(x, y) = -\varepsilon_Q(x, z)$ であれば、 $x(X) \cap y(X)$ 上の点 R で $\phi_R < \phi_P$ を満たすものが存在するか、あるいは $y = z = x^m$ が成り立つ。

この補題の証明では、 x^m, y, z 、および $|x_P^m y_P| = |x_Q^m z_Q|$ に対応する4つの閉測地線の上半平面へのリフトの配置を考察する。その配置のパターンをおよそ20通りに分類し、各場合において主張が成り立つことを示す。

Lemma 3.1 について、 $z = y$ を代入することで次の補題を得る。

Lemma 3.2. X を S 上のある双曲計量とする. $x, y \in \hat{\pi}$ に対して, $x(X) \cap y(X)$ 上の点 P, Q が, $\varepsilon_P(x, y) = -\varepsilon_Q(x, y)$ をみたし, $|x_P^m y_P| = |x_Q^m y_Q|$ をみたす $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ が存在するとする. このとき, $x(X) \cap y(X)$ 上の点 R で $\phi_R < \phi_P$ を満たすものが存在するか, あるいは $y = x^m$ が成り立つ.

この補題から, 2つの閉測地線の $x(X)$ と $y(X)$ が交点をもつとき, 2以上の自然数 m に対しては, $[x^m, y] \neq 0$ (ただし, $y \neq x^m$) となることがわかる. 対偶を考えることで Theorem 2.1 がしたがう.

次に, a pair of pants の Goldman Lie 代数の中心が non-essential loop の類で生成されることの証明につる. Lemma 3.1 から, 次の補題がしたがう.

Lemma 3.3. X を S 上のある双曲計量とする. $x \in \hat{\pi}$ と $y = \sum_{j=1}^n c_j y_j \in K\hat{\pi}$ について, 任意の自然数 m で, $[x^m, y] = 0$ が成り立つとき, 各 y_j は以下の (1), (2) のいずれかが成り立つ.

- (1) y_j は non-essential である.
- (2) y_j は essential であり, $y_j(X)$ と $x(X)$ は交わらない.

Lemma 3.3 の x として, a pair of pants 上の 8 の字曲線をとる (曲線の向きはどちらか 1つを定めておく) ことにより, 中心の任意の元は, non-essential loop の線形和となる必要がわかる.

4 具体例を用いた分離判定法の適用

4.1 Goldman 括弧積の代数的計算による分離判定法の利用

この節では, いくつかの例を用いて, 分離判定法の使い方を説明する. 分離判定法は, 交点を用いて定義される Goldman 括弧積に基づいている. 基本群の共役類の集合と向き付けられた閉曲線の自由ホモトピー類の集合の間には自然な全単射が存在するため, Goldman 括弧積は部分的に代数的に計算できる. 特に, 与えられた 2つの閉曲線がホモトピーによって分離可能かどうかを, Goldman 括弧積を代数的に計算することで判定する方法を示す.

Example 4.1. 図 2 (右) に示すように, x, y を種数 2 の向き付け可能な曲面 Σ 上の 2つのループとする.

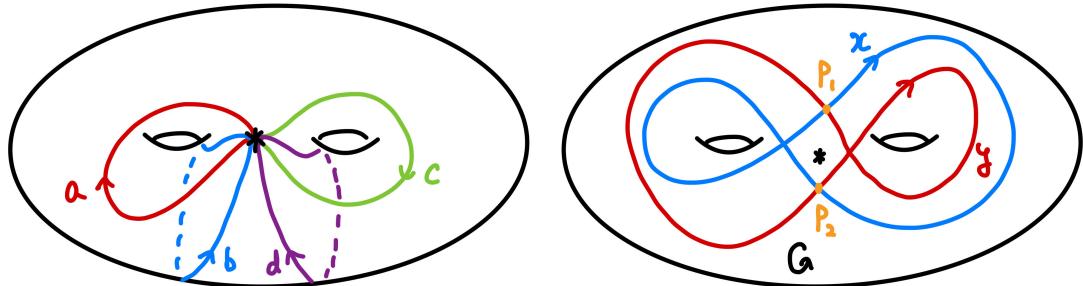


図 2: 種数 2 の閉曲面とその基本群のある生成系 (左), および同じ曲面上の 2つのループ x と y (右)

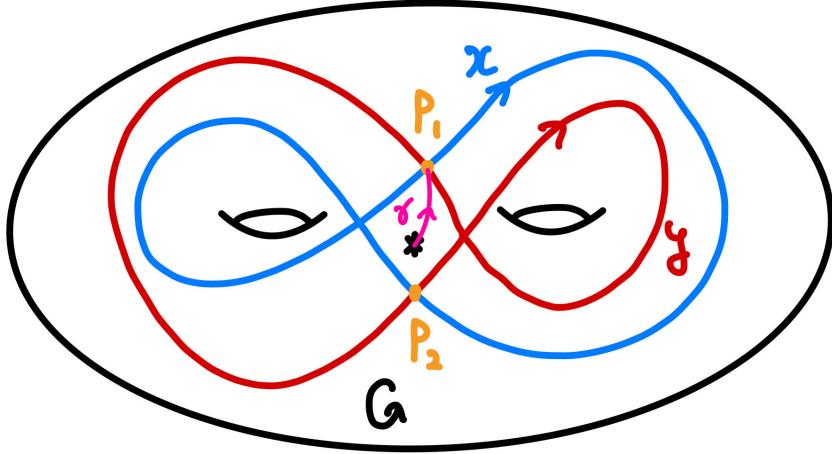


図 3: 基点 $*$ と交点 P_1 を結ぶ道 γ

図 2 より, ループ x と y は 2 点で交差し, それぞれを P_1, P_2 とする. 各点における局所交差数は, それぞれ $+1, -1$ である. よって, 以下が成り立つ:

$$[x^m, y] = m(|x_{P_1}^m y_{P_1}| - |x_{P_2}^m y_{P_2}|)$$

次に, 各項 $|x_{P_i}^m y_{P_i}|$ が基本群の共役類の元としてどのように表されるかを説明する. 図 3 に示されているように, 基点 $*$ から交点 P_1 を結ぶ道 γ を取る. このとき, ループ $x_{P_1}^m y_{P_1}$ は次の基点付きループとホモトピックである:

$$\gamma \cdot x_{P_1}^m y_{P_1} \cdot \gamma^{-1}$$

これは以下のように書き換えられる:

$$(\gamma \cdot x_{P_1} \cdot \gamma^{-1})^m \cdot (\gamma \cdot y_{P_1} \cdot \gamma^{-1})$$

したがって, $\pi_1(\Sigma, *)$ における $\gamma \cdot x_{P_1} \cdot \gamma^{-1}$ および $\gamma \cdot y_{P_1} \cdot \gamma^{-1}$ を計算すればよく, 図 3 より,

$$\gamma \cdot x_{P_1} \cdot \gamma^{-1} = ca^{-1} \in \pi_1(\Sigma, *), \quad \gamma \cdot y_{P_1} \cdot \gamma^{-1} = a^{-1}c \in \pi_1(\Sigma, *)$$

が得られる. よって,

$$\gamma \cdot x_{P_1}^m y_{P_1} \cdot \gamma^{-1} = (ca^{-1})^m a^{-1}c \in \pi_1(\Sigma, *)$$

であり, $|x_{P_1}^m y_{P_1}| = (ca^{-1})^m a^{-1}c \in \pi_1(\Sigma, *)/\text{conj}$ となる. 同様に,

$$|x_{P_2}^m y_{P_2}| = (a^{-1}c)^m ca^{-1} \in \pi_1(\Sigma, *)/\text{conj}$$

となる. したがって,

$$[x^m, y] = m((ca^{-1})^m a^{-1}c - (a^{-1}c)^m ca^{-1})$$

となる. 特に $m = 1$ のとき,

$$[x, y] = ca^{-2}c - a^{-1}c^2a^{-1}$$

どちらの項も共役類の元であるため, 文字の巡回置換により同じ共役類 c^2a^{-2} を表している. ゆえに, $[x, y] = 0$ が成り立つ (実際, x, y は自由ホモトピックなので, Lie 括弧積の交代性から明らかである). 一方で $[x^2, y] \neq 0$ となるため, x, y はホモトピーによって分離できないことがわかる.

4.2 境界や穴をもつ向き付け可能曲面における計算の簡略化

次に、境界や 1 点穴（パンクチャー）をもつ向き付け可能曲面の場合を考える。このような曲面では、Goldman 括弧積の計算が閉曲面の場合に比べて簡単に実行できる。以下で述べるように、適切な「arc（弧）」の系を導入することで、ループの自由ホモトピー類を代数的に扱いやすくなる。

負のオイラー標数を持つ境界付き向き付け可能曲面を考える。境界と境界を結ぶ互いに交わらない arc の極大集合を選び、それらを曲面から取り除いた部分が連結であるとする（図 4 の灰色の点線（arc の系）を見よ）。この連結性と極大性により、任意の 2 つの arc が、端点を境界上に保ったままのホモトピー（境界相対ホモトピー）で同一になることはない。

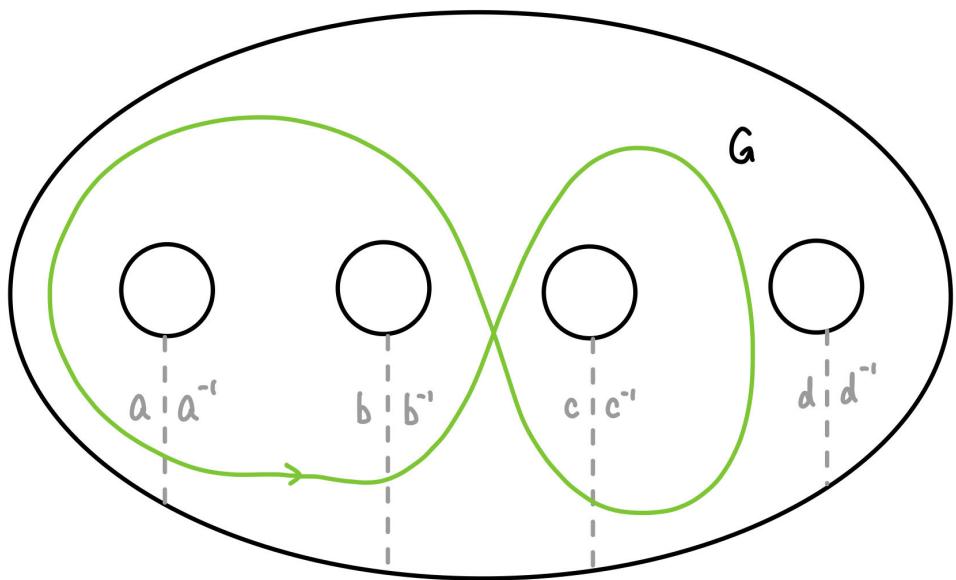


図 4: 4 つ穴あき円板における arc の系とループ abc^{-1}

各 arc の片側に文字 s を、反対側に s^{-1} を割り当てる。このとき、これらのラベルは曲面の基本群の生成系を定める。曲面上の自由ホモトピー類は以下の手順により基本群の共役類の元として表すことができる：

1. ループの自由ホモトピー類の代表元を 1 つ選ぶ。
2. その代表元から任意に始点を 1 つ決め、ループを 1 周たどる。
3. 各 arc を通過するたびに、arc の手前側の文字を（順番も含めて）記録する。
4. それらを左から順に並べて得られる文字列 $s_1 s_2 \dots s_n$ の巡回被約語が基本群の共役類の 1 つの代表元を与える。

例えば、図 4 の緑のループは、 abc^{-1} に対応する。始点の選び方によっては、 $bc^{-1}a$ や $c^{-1}ab$ になり得るが、いずれも同じ共役類を表すことに注意せよ。

Example 4.2. 図 5 に示すように、 x, y を 4 つ穴あき円板上の 2 つのループとする。

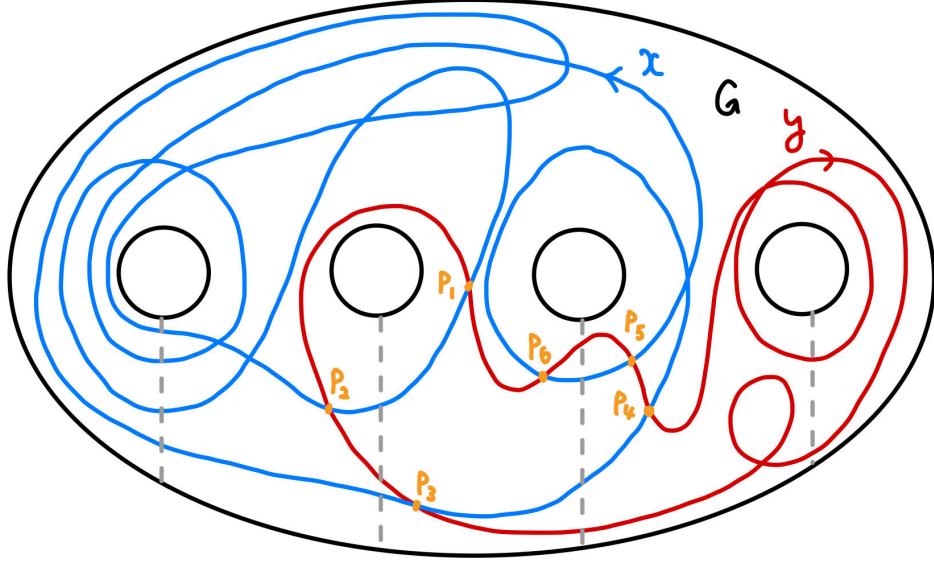


図 5: 4 つ穴あき円板上の 2 つのループ x, y

x, y がホモトピーによって分離可能かどうか（すなわち交わらない代表元をもつかどうか）を調べるために，Goldman 括弧積 $[x^m, y]$ を計算する. 図 5 より，交点は P_1 から P_6 の 6 点であり，それぞれの局所交差数は順に $+1, -1, +1, -1, -1, +1$ である. したがって，

$$[x^m, y] = m \left(|x_{P_1}^m y_{P_1}| - |x_{P_2}^m y_{P_2}| + |x_{P_3}^m y_{P_3}| - |x_{P_4}^m y_{P_4}| - |x_{P_5}^m y_{P_5}| + |x_{P_6}^m y_{P_6}| \right)$$

各項は，図 4 で導入した arc の系を用いて計算すると以下のようになる：

$$[x^m, y] = m \begin{pmatrix} (c^2 a^2)^m c d^{-2} c^{-1} b^{-1} \\ - b(c^2 a^2)^m b^{-1} c d^{-2} c^{-1} b^{-1} \\ + (c^2 a^2)^m b^{-1} c d^{-2} c^{-1} \\ - c(c a^2 c)^m d^{-2} c^{-1} b^{-1} \\ - c(a^2 c^2)^m d^{-2} c^{-1} b^{-1} \\ + (c a^2 c)^m c d^{-2} c^{-1} b^{-1} \end{pmatrix}$$

ここで，

- 第 1 項と第 4 項は $(c^2 a^2)^m c = c(c a^2 c)^m$ なので打ち消し合う.
- 第 5 項と第 6 項も同様に打ち消し合う.
- 第 2 項の先頭にある b と末尾にある b^{-1} は reduce できる. そのため，第 2 項は第 3 項と共に役類として一致するので打ち消し合う.

となるので，任意の自然数 m に対して $[x^m, y] = 0$ が成り立つ.

定理 2.2 より，2 つのループ x, y はホモトピーで分離可能であることが従う. 実際， $x = c^2 a^2$, $y = d^{-2} c^{-1} b^{-1} c \in \pi_1(\Sigma, *)/\text{conj}$ であることから，図 6 のように両者が交わらない代表元を選べることに気付く読者もいるかもしれない.

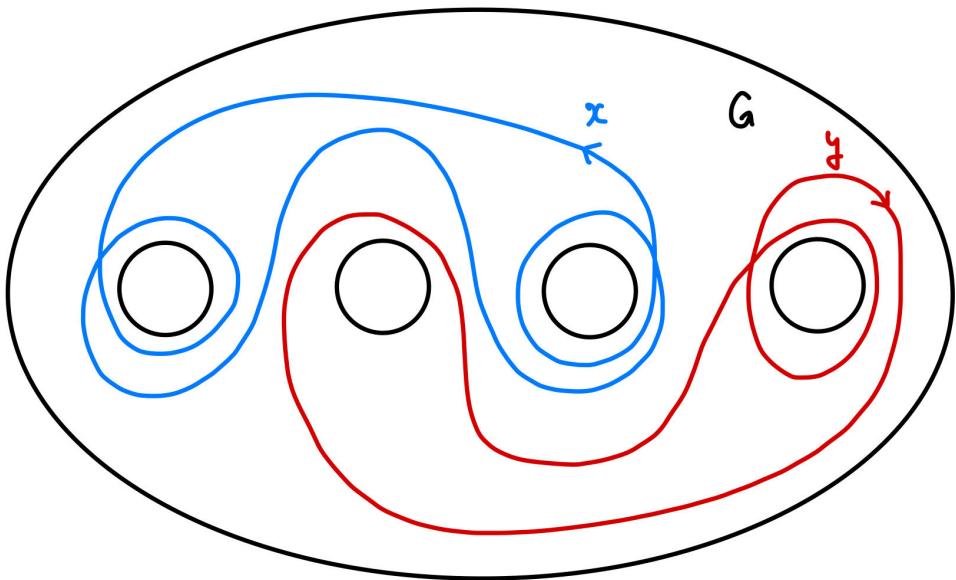


図 6: 4 つ穴あき円板上で交わらない x と y の代表元

参考文献

- [1] Alan F. Beardon. *The geometry of discrete groups*, volume 91 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [2] Moira Chas and Arpan Kabiraj. The Lie bracket of undirected closed curves on a surface. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 375(4):2365–2386, 2022.
- [3] Pavel Etingof. Casimirs of the Goldman Lie algebra of a closed surface. *Int. Math. Res. Not.*, pages Art. ID 24894, 5, 2006.
- [4] William M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. *Invent. Math.*, 85(2):263–302, 1986.
- [5] Arpan Kabiraj. Center of the Goldman Lie algebra. *Algebr. Geom. Topol.*, 16(5):2839–2849, 2016.
- [6] N. Kawazumi and Y. Kuno, The center of the Goldman Lie algebra of a surface of infinite genus, *Quarterly J. Math.*, (2013).